تلخيص المعادلات التفاضلية 1

HADANOUV

1 من المرتبة الأولى و المحلولة بالنسبة للمشتق

$$y' = F(x, y)$$

أ) مفصولة المتغيرات:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)L(y)$$

2 ترد إلى مفصولة المتغيرات:

$$y' = F(\underbrace{ax+by+c}_{Z})$$

نفرض Z

3 المعادلة المتجانسة:

$$y' = f(x, y)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

نفرض $Z = \frac{y}{x}$

4 ترد إلى متجانسة:

$$y' = F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

تطابق

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$y' = F(\lambda) = c$$

$$y = cx + c_1$$

توازي

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

نفرض

$$Z = a_2x + b_2y$$

تقاطع

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$(x_0, y_0)$$

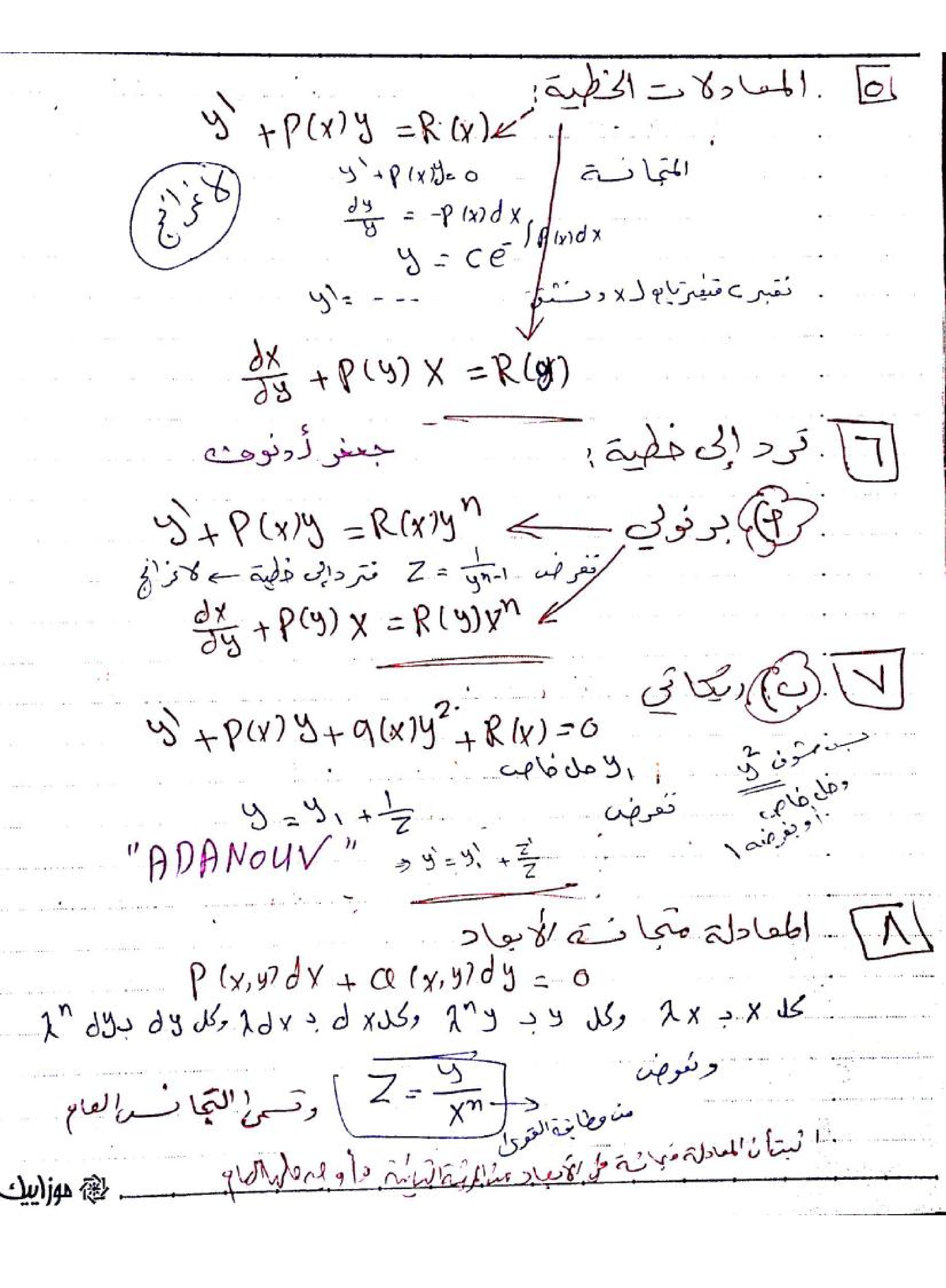
$$x = x_0 + X$$

$$y = y_0 + Y$$

$$dx = dX$$

$$dy = dY$$

نفرض $Z = \frac{Y}{X}$



5. المعادلات الخطية:

$$y' + P(x)y = R(x)$$

(لاغرانج)

المتجانسة:

$$y' + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

$$y = ce^{-\int P(x)dx}$$

نعتبر c متغيرا تابعا لـ x ونشتق $y' = ---$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = R(y)$$

6. ترد إلى خطية: جعفر أدنوف

(ب) برنولي:

$$y' + P(x)y = R(x)y^n$$

نفرض $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ فترد إلى خطية ← لاغرانج

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = R(y)x^n$$

7. (ت) ريكاتي

$$y' + P(x)y + q(x)y^2 + R(x) = 0$$

y_1 حل خاص ؛ نفرض

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

بسبب وجود y^2 وحل خاص أو بفرضه

"ADANOUV" $\Rightarrow y' = y_1' + \frac{z'}{z}$

8. المعادلة متجانسة الأبعاد

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

كل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ وكل dx بـ λdx وكل dy بـ $\lambda^n dy$

ونعوض

$$Z = \frac{y}{x^n}$$ ← من مطابقة القوى

وتسمى التجانس العام

1. لنبيات أن المعادلة متجانسة في الأبعاد [illegible]

٩ المعادلة التامة

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$ تامة

نبحث عن F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad \ldots (2)$$

بحفظ أدونه

مثلاً نكامل (1) بالنسبة لـ x ونضيف ثابت $\varphi(y)$ للمعادلة ونشتق بالنسبة لـ y ونقارن مع (2)

نوجد F

$$\boxed{F = 0} \quad \text{الحل العام}$$

١٠ التي ليست تامة / عامل التكميل /

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

حيث $$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

نبحث عن μ عامل التكميل

$$\frac{\partial \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

μ تابع لـ x

$$\frac{\partial \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} dy$$

μ تابع لـ y

/ /

μ تابع ل $x.y$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\mu \, dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P} \partial z$$

μ تابع ل x^2+y^2

$$\frac{\partial \ln \mu}{\mu \, dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - P \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} \partial z$$

نضرب عامل التكميل بالمعادلة
تصبح تامة ونكمل كالسابق.

(11) المعادلات غير المحلولة بالنسبة للمشتق

1) يمكن عزل y، $y = f(x, y')$

- نفرض $p = y'$ ثم نشتق المعادلة بالنسبة ل x
- نطرح المعادلة ← نشتق
- نقلب النسبة لتصبح $\frac{dx}{dp}$
- تصبح معادلة خطية
- نوجد x بدلالة p و c
- نحسب p من x أو نبقيها
- نعوض عن x و p في أول معادلة.

2) يمكن عزل x!

3) ليست تابعة لـ y $x = f(y')$ (وسيطي)

- نفرض $y' = t$
- نعوض بالمعادلة ونشتق x بالنسبة لـ t أي $\frac{dx}{dt}$
- نعوض في $dy = t\,dx$
- نكامل الأخيرة نحصل على y
- $\left.\begin{array}{l} y = \text{—} t \\ x = \text{—} t \end{array}\right\}$ الحل وسيطي بدلالة t

4) ليست تابعة لـ x . $y = f(y')$ (وسيطي)

- نفرض $y' = t$
- نعوض بالمعادلة ونشتق y بالنسبة لـ t أي $\frac{dy}{dt}$
- نعوض في $dx = \frac{dy}{t}$
- نكامل الأخيرة نحصل على x
- $\left.\begin{array}{l} x = \text{—} t \\ y = \text{—} t \end{array}\right\}$ الحل وسيطي بدلالة t

5) لا تحوي لا y و لا x $F(y') = 0$

- نعوض بدل كل y' بـ $\frac{y - c}{x}$

فصلاً

جعفر أدنوف

#السيد_تراب

انتهى المقرر

تراب

فكر تقلب النسبة إذا لم تُحل

بالتجزئة / لا = ... ملاحظات :

$\int e^{\square} dx$
$\int \cos \square dx$
$\int \sin \square dx$

فكرة: $y' + P(x)y = R(x)$

هل المعادلة تحوي y أو x ← $F(\frac{y-c}{x}) = 0$

لا تحوي y ← $y' = t$ / $dy = t dx$ / نشتق x بالنسبة لـ t ونحسب y

لا تحوي x ← $y' = t$ ← ... / نشتق y بالنسبة لـ t ونحسب x ← $p^2 = 2p \frac{dp}{dx}$

محلولة بالنسبة لـ y ← نوحد y / نفرض $y' = p$ / نشتق دـ x / نقلب / تجمع خطية / نحسب x والكلاسيكي

محلولة بالنسبة لـ x ← نوحد x / نفرض $y' = p$ / نشتق دـ y / نقلب / تجمع خطية / نحسب y

فيها y'' من درجة عليا ← $y' = p$ ← $y'' = p\frac{dp}{dy}$ ← متحولات منفصلة

تحرّب

خطية ← لا تخلع

برنولي ← $y' + P(x)y = R(x)y^n$

ريكاتي ← $y' + R_1(x)y + R_2(x)y^2 = R(x)$ وحلها خاص

ولا ننسى ممكن الكتابة بالشكل

$y' + P(x)y = R(x)$

أو $x' + P(y)x = R(y)$ (صح)

فكرة: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

معادلة متجانسة ← $F = \varphi(\frac{y}{x})$ ونفرض $Z = \frac{y}{x}$

معادلة تامة ← $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ← $F = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y) dy$

معادلة غير تامة ← $\neq$ ← نوجد عامل التكميل

$$\frac{\partial \ln M}{\square} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P}$$

x ← Q، P → y

$y \cdot x$ للفرض φ

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

ADANOUV

المعادلات التفاضلية 1

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق y'

$$y' = f(x,y)$$

1) مفصولة التغيرات:

① $y' = f(x,y)$

② $y' = g(x)L(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(x)L(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{L(y)} = \int g(x)dx + c$

مثال

$$x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$$

$$y(x^2-1)dy = x(1-y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)}$$

$$\frac{y\,dy}{1-y^2} = \frac{x}{x^2-1}dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2y\,dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)} = \frac{1}{c}}$$ ح.العام

2) $y' = \frac{-y}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x-3}$

$\ln y = -\ln(x-3) + \ln c \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x-3}}$ الحل العام

2) معادلات تؤول إلى مفصولة التغيرات:

من الشكل: $y' = f(ax+by+c)$

من أجل ذلك نفرض $z = ax+b+c$

مثال ①

$$y' = 2x+y-1$$

نفرض $z = 2x+y-1$

$$\Rightarrow z' = 2+y' \Rightarrow y' = z'-2$$

نعوض نجد $z'-2 = z \Rightarrow z' = z+2$

$\Rightarrow Z - \ln(z+2) = x + \ln c$

$\Rightarrow \ln e^{z} - \ln(z+2) = \ln e^{x} + \ln c$

$\Rightarrow \frac{e^{z}}{(z+2)} = c e^{x}$

$\Rightarrow \frac{dz}{z+2} = dx \Rightarrow \ln(z+2) = x + \ln c$

$\Rightarrow z+2 = ce^{x} \Rightarrow z = ce^{x} - 2$

$\Rightarrow y + 2x - 1 = ce^{x} - 2 \Rightarrow y = -2x + ce^{x} - 1$

$x f(xy)\,dx + y f(xy)\,dy = 0$ ② حالة

نفرض $z = x \cdot y$ نجد

~~$x f(z)\,dx + y f(z)\,dy = 0$~~ ~~$\Rightarrow y = \frac{z}{x}$~~

مثال: $y(1-xy)\,dx - x(1+xy)\,dy = 0$

$\Rightarrow y(1-xy)\,dx = x(1+xy)\,dy$

$\Rightarrow y' = \frac{y(1-xy)}{x(1+xy)}$

نفرض $z = xy$

$y = \frac{z}{x} \longrightarrow y' = \frac{z'x - z}{x^2}$

$y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$

نعوض

$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = \frac{\frac{z}{x}(1-z)}{x(1+z)}$

نضرب بـ x^2

$\Rightarrow x z' - z = z\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$

$\Rightarrow x z' = \frac{2z}{1+z} \Rightarrow \frac{1+z}{z}\,dz = 2\frac{dx}{x}$

جعفر أدنوف   / /

المعادلة المتجانسة:

نقول عن $y' = f(x,y)$ أنها متجانسة إذا حققت.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

وهنا نفرض. $Z = \frac{y}{x}$

(نقسم على x^2) $\rightarrow \frac{2\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2}$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

متجانسة. $\Leftarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} = f(x,y)$

نفرض $Z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Z \cdot x \Rightarrow y' = Z' x + Z$

نعوض نجد.

$$Z'x + Z = 2\frac{Z}{1-Z^2} \Rightarrow Z'x = \frac{2Z}{1-Z^2} - Z$$

$$Z'x = \frac{2Z - Z + Z^3}{1-Z^2} \Rightarrow Z'x = \frac{Z^3+Z}{1-Z^2}$$

$$\frac{dZ}{dx}x = \frac{Z^3+Z}{1-Z^2} \Rightarrow \frac{1-Z^2}{Z^3+Z}dZ = \frac{dx}{x}$$

لحساب التكامل لـ وكون درجة البسط أصغر من المقام نفرق الكسور.

$$\frac{1-Z^2}{Z(Z^2+1)}dZ = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1-Z^2}{Z(Z^2+1)} = \frac{A}{Z} + \frac{BZ+C}{Z^2+1}$$

لحساب A نضرب الطرفين بمقامها ونعوض بدل Z بـ 0 نجد

$$\frac{1-Z^2}{Z^2+1} = A + Z\frac{BZ+C}{Z^2+1} \Rightarrow 1 = A + 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

لحساب B بجعل البسط من درجة المقام نوجه لانهاية عند $Z \to \infty$ نجد

$$\frac{1-Z^2}{Z^2+1} = A + \frac{BZ^2+CZ}{Z^2+1} \Rightarrow \lim_{Z\to\infty}\left(\frac{1-Z^2}{Z^2+1}\right) = A + \lim_{Z\to\infty}\left(\frac{BZ^2+CZ}{Z^2+1}\right)$$

نعوض عن A بقيمتها نجد

$$-1 = A + B$$

$$\Rightarrow \boxed{B = -2}$$

$\frac{1-z^3}{z^3+z}$ و $D:\mathbb{R}\setminus\{0\}$

لحساب c نعوض عن قيمة B و A ونختار قيمة لـ z من مجموعة تعريف الدالة الأصلية
نختار $\boxed{z=1}$ ونعوض بكل ما سبق في التركيب المراد حساب تكامله

$$\frac{1-1}{1+1} = \frac{1}{1} + \frac{-2(1)+c}{2} \Rightarrow 0 = 2 - 2 + c$$
$$\Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-z^2}{z(z^2+1)}\,dz = \int \frac{1}{z}\,dz - \int \frac{2z}{z^2+1}\,dz$$

$$= \ln z - \ln(z^2+1)$$

نعود للمعادلة نجد

$$\int \frac{1-z^2}{z(z^2+1)}\,dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln z - \ln(z^2+1) = \ln x + \ln c$$
$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = cx$$

نعوض بالمتحولات الأصلية نجد

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}+1} = cx \Rightarrow \frac{x^2 y}{xy^2+x^3} = cx$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2} = cx \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x^2+y^2} = c}$$

المعادلة التي ترد إلى متجانسة:

ولها ثلاث حالات

$$y' = F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

حالة ①

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \longrightarrow$$ حالة تقاطع

بالحل المشترك $\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0)$ نقطة التقاطع

نفرض

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array}$$

ونفرض $Z = \frac{Y}{X}$ ---

حالة ②

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \longrightarrow$$ حالة توازي

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow y' = F\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right)$$

نفرض

$Z = a_2x+b_2y$ فتتحول متجانسة أو متغيرات منفصلة

حالة ③

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda \longrightarrow$$ حالة تطابق

$$\Rightarrow y' = F\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y+c_2)}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = F(\lambda) = C \Rightarrow \boxed{y = CX + C_1}$$

الحل العام لها

1) مثال: أوجد الحل العام للمعادلة $(2x-y)\,dx - (2x-y+1)\,dy = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x-y}{2x-y+1} \qquad \frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{1}$$

a_2x+b_2y+

حالة توازي نفرض

$$Z = 2x - y \Rightarrow Z' = 2 - y' \Rightarrow y' = 2 - Z'$$

نعوض نجد

$$2 - Z' = \frac{Z}{Z+1} \Rightarrow -Z' = \frac{Z-2Z-2}{Z+1} = \frac{-Z-2}{Z+1}$$

$$\Rightarrow Z' = \frac{Z+2}{Z+1} \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = \frac{Z+2}{Z+1} \Rightarrow \frac{Z+1}{Z+2}\,dZ = dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Z+2}{Z+2} - \frac{1}{Z+2}\right) dZ = dx \Rightarrow \int dZ - \int \frac{dZ}{Z+2} = \int dx$$

$$\Rightarrow Z - \ln(Z+2) = x + \ln c \Rightarrow \ln e^{Z} - \ln(Z+2) = \ln e^{x} + \ln c$$

$$\Rightarrow (Z+2)^{-1} e^{Z} = c e^{x} \Rightarrow \frac{e^{Z}}{(Z+2)} = c e^{x}$$

نعود بالتحولات النتيجة نجد

$$\frac{e^{2x-y}}{(2x-y+2)} = c e^{x}$$

ع: Z

2) أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$$

$$\frac{2}{2} \neq \frac{-5}{4} \neq \frac{3}{-6}$$

حالة تقاطع

نوجد نقطة التقاطع

بحل المعادلتين بالطرح:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ 2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$0 - 9y + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = 1} \Rightarrow \boxed{x_0 = 1} \Rightarrow M(1,1)$$

نفرض

$x = 1 + X, \quad y = 1 + Y \Rightarrow dx = dX, \quad dy = dY$

نبدل في المعادلة نجد

$$Y' = \frac{2(1+X) - 5(1+Y) + 3}{2(1+X) + 4(1+Y) - 6}$$

$$\Rightarrow Y' = \frac{2 + 2X - 5 - 5Y + 3}{2 + 2X + 4 + 4Y - 6} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y}$$

(أصبحت متجانسة انتبه)

نفرض $Z = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = ZX \Rightarrow Y' = Z'X + Z$

$$\Rightarrow Y' = \frac{2 - 5\frac{Y}{X}}{2 + 4\frac{Y}{X}} \Rightarrow Y' = \frac{2 - 5Z}{2 + 4Z}$$

$$\Rightarrow Z'X + Z = \frac{2 - 5Z}{2 + 4Z} \Rightarrow Z'X = \frac{2 - 5Z - 2Z - 4Z^2}{2 + 4Z}$$

$$\Rightarrow Z'X = \frac{-4Z^2 - 7Z + 2}{4Z + 2} \Rightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{-4Z^2 - 7Z + 2}{4Z + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{4Z + 2}{4Z^2 + 7Z - 2} dZ = -\frac{dX}{X}$$

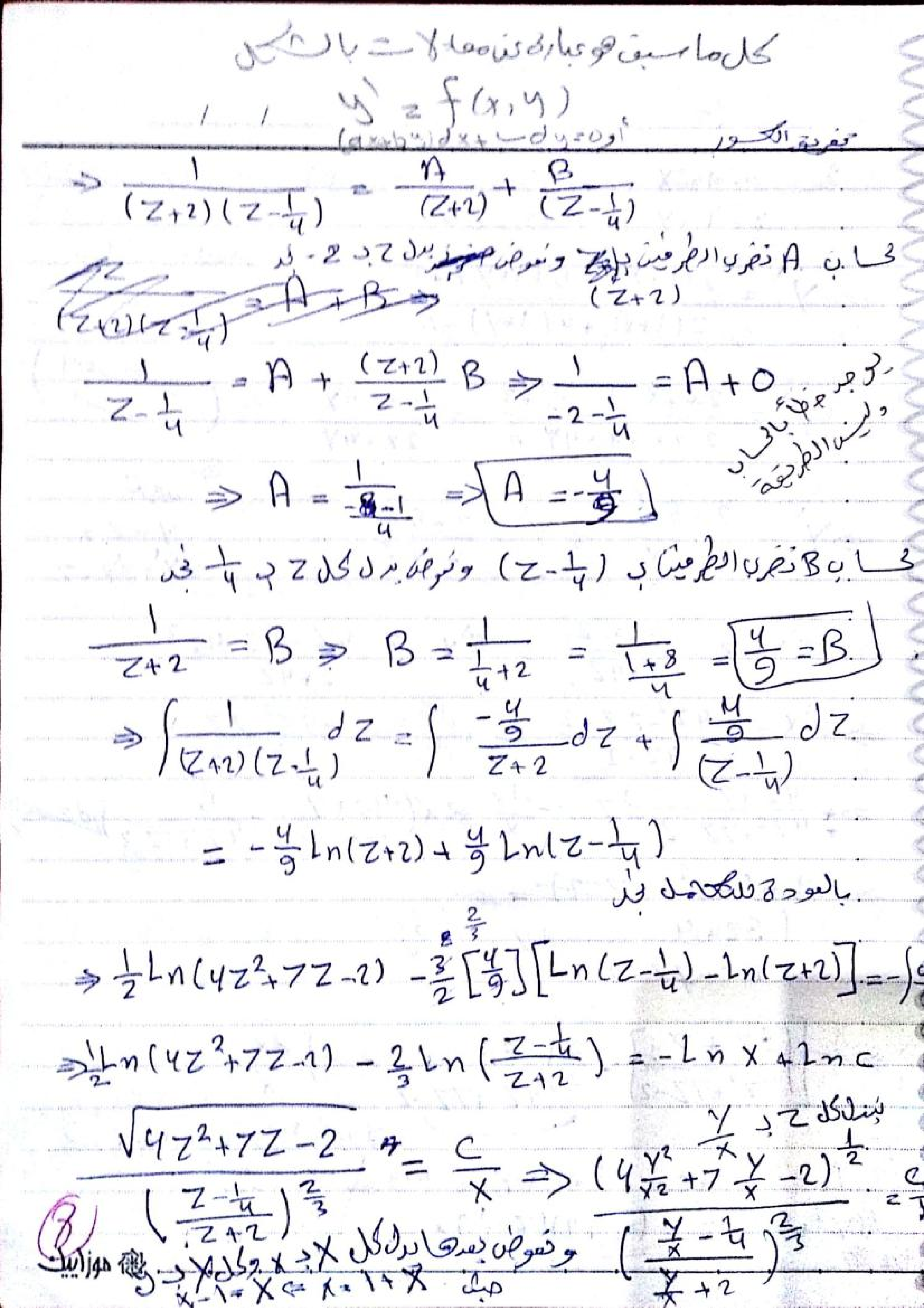
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{8Z + 4}{4Z^2 + 7Z - 2} dZ = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\int \frac{8Z + 7}{4Z^2 + 7Z - 2} dZ\right] - \frac{3}{2}\int \frac{dZ}{4Z^2 + 7Z - 2} = -\int \frac{dX}{X}$$

كسر نوع تكامل تفريق لكسور الجزئية

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 9 \Rightarrow Z_1 = -2, \quad Z_2 = \frac{1}{4}$$

$$4Z^2 + 7Z - 2 = (Z + 2)(Z - \tfrac{1}{4}) = 0$$



كل ما سبق هو عبارة عن معادلات بالشكل

$$y' = f(x,y)$$

أو $(ax+b)\,dx + \ldots\,dy = 0$

تفريق الكسور

$$\Rightarrow \frac{1}{(Z+2)(Z-\frac{1}{4})} = \frac{A}{(Z+2)} + \frac{B}{(Z-\frac{1}{4})}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(Z+2)$ ونعوض بدل Z بـ -2 نجد

$$\frac{1}{Z-\frac{1}{4}} = A + \frac{(Z+2)}{Z-\frac{1}{4}}B \Rightarrow \frac{1}{-2-\frac{1}{4}} = A + 0$$

ركز جيداً على حساب وليس الطريقة

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\frac{-8-1}{4}} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{4}{9}}$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(Z-\frac{1}{4})$ ونعوض بدل كل Z بـ $\frac{1}{4}$ نجد

$$\frac{1}{Z+2} = B \Rightarrow B = \frac{1}{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{\frac{1+8}{4}} = \boxed{\frac{4}{9} = B}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(Z+2)(Z-\frac{1}{4})}\,dZ = \int \frac{-\frac{4}{9}}{Z+2}\,dZ + \int \frac{\frac{4}{9}}{(Z-\frac{1}{4})}\,dZ$$

$$= -\frac{4}{9}\ln(Z+2) + \frac{4}{9}\ln(Z-\frac{1}{4})$$

بالعودة للتكامل نجد

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(4Z^2+7Z-2) - \frac{3}{2}\left[\frac{4}{9}\right]\left[\ln(Z-\frac{1}{4}) - \ln(Z+2)\right] = -\int \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(4Z^2+7Z-2) - \frac{2}{3}\ln\left(\frac{Z-\frac{1}{4}}{Z+2}\right) = -\ln x + \ln c$$

نبدل كل Z بـ $\frac{Y}{X}$

$$\frac{\sqrt{4Z^2+7Z-2}}{\left(\frac{Z-\frac{1}{4}}{Z+2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{\left(4\frac{Y^2}{X^2}+7\frac{Y}{X}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\frac{Y}{X}-\frac{1}{4}}{\frac{Y}{X}+2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{c}{X}$$

ونعوض بعدها بدل كل X بـ x وكل Y بـ y

$x-1 = X \Leftarrow x = 1 + X$ حيث

أشبه الأمثال ①

المعادلات الخطية : هي معادلة على الشكل

$$y' \mp P(x)y = R(x)$$

لحلها نأخذ المتجانسة منها

$$y' \mp P(x)y = 0 \Rightarrow y' = \pm P(x)y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \pm P(x)dx \Rightarrow \ln y = \pm P(x)dx$$

$$\Rightarrow \ln y = \pm \int P(x)dx + \ln c$$

$$\Rightarrow y = ce^{-\int P(x)dx} \quad (\ast)$$

نعتبر c متغير بالنسبة لـ x ونشتق نجد

$$y' = c'e^{-\int P(x)dx} - cP(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (\ast')$$

نعوض $(\ast)$ و $(\ast')$ بغير المتجانسة (الأساسية) ⇐

دوماً / أقصر

$$c'e^{-\int P(x)dx} - cP(x)e^{-\int P(x)dx} + cP(x)e^{-\int P(x)dx} = R(x)$$

$$\Rightarrow c' = R(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow c = \int R(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

الحل العام

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int R(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right)$$

أوجد الحل العام للمعادلة $xy' - 2y = 2x^4$

الحل:

$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}x^3$ لاخطية / لا خوارزمي

معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة تأخذ المتجانسة منها.

$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$

$\Rightarrow \ln y = 2\ln x + \ln c \Rightarrow \boxed{y = cx^2}$

نجعل c متغير لـ x ونشتق نجد

$\boxed{y' = c'x^2 + 2cx}$

نعوض في اللاخطية غير المتجانسة نجد.

$c'x^2 + 2cx - 2cx = 2x^3$

$\Rightarrow c' = 2x \Rightarrow \boxed{c = x^2 + c_1}$

نعوض في الحل العام للمتجانسة نجد

$\boxed{y = x^4 + c_1x^2}$ ح.ع.ع.

$x' + p(y)x = R(y)x^n$ ممكن تكون برنولي بالشكل

★ المعادلات التي ترد إلى خطية ← تبديل المتغير

(P معادلة برنولي:

$y' + P(x)y = R(x)y^n$

نقسم على y^n نجد

$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = R(x)$

ونفرض $Z = \frac{1}{y^{n-1}}$ ...

فترد إلى خطية تابع Z ذو متحول x

مثال:

$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

برنولي. $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$

$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$

نفرض أن $Z = \sqrt{y} \Leftarrow$

$\Rightarrow y = Z^2$

ونعوض نجد $Z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$

$2Z' - \frac{4}{x}Z = x \Rightarrow Z' - \frac{2}{x}Z = \frac{x}{2}$

في معرآ أمثال Z' = 1

خطية غير متجانسة بلا غرانج
نأخذ المتجانسة

$Z' - \frac{2}{x}Z = 0$

$\frac{dZ}{Z} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow Z = cx^2$ ★

نعتبر c تابع لـ x ونشتق نجد

$Z' = c'x^2 + 2cx$

نعوض في غير المتجانسة نجد

$c'x^2 + 2cx - 2cx = \frac{x}{2} \Rightarrow c' = \frac{1}{2x}$

$\Rightarrow c = \ln\sqrt{x} + c_1$

نعوض في ★ نجد

$Z = x^2\ln\sqrt{x} + c_1x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x^2\ln\sqrt{x} + c_1x^2$

هامة هذه الفكرة أجت الفحص الماضي   / /

حل المعادلة: $(2y\sqrt{y}\cos y + x)\frac{dy}{dx} = 2y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2y\sqrt{y}\cos y + x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2y\sqrt{y}\cos y}{2y} + \frac{x}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{y}\cos y + \frac{x}{2y}$$

خطية تابع x بمتحول y

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{2y} = \sqrt{y}\cos y \Rightarrow \boxed{x' - \frac{1}{2y}x = \sqrt{y}\cos y}$$

نأخذ المتجانسة W

$$x' - \frac{1}{2y}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln y + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{x = c\sqrt{y}} \; *$$

نجعل c متغير لـ y ونشتق نجد

$$\boxed{x' = c'\sqrt{y} + c\frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

نعوض في المتجانسة نجد

$$c'\sqrt{y} + \frac{c}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2y}c\sqrt{y} = \sqrt{y}\cos y$$

$$\Rightarrow c'\sqrt{y} = \sqrt{y}\cos y \Rightarrow c' = \cos y$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sin y + c_1}$$

نعوض في * نجد

$$\boxed{x = \sqrt{y}\sin y + c_1\sqrt{y}}$$

و.ه.م

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = R(y)\,x^n$$

برنولي

$$/ \quad / \quad \frac{dx}{dy} + P(y)\,x = C \longrightarrow \text{خطية لـ } x$$

حل المعادلة: $\frac{dy}{dx} \cdot x^3 \sin y + 2y = x\frac{dy}{dx}$

دورة ٢٠١٧

$$x^3 \sin y \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\Rightarrow (x^3 \sin y - x)\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x^3 \sin y - x}$$

نقلب لوجود $\sin y$ في المقام (التي لم تظهر بأي حل درسناه)

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^3 \sin y}{2y} + \frac{x}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}x - \frac{\sin y}{2y}x^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3$$

برنولي

$$x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3$$

نقسم على x^3 نجد

$$\frac{x'}{x^3} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y}$$

نفرض

$$z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z' = \frac{-2xx'}{x^4} \Rightarrow z' = -2\frac{x'}{x^3} \Rightarrow -\frac{1}{2}z' = \frac{x'}{x^3}$$

نعوض نجد

$$-\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2y}z = -\frac{\sin y}{2y}$$

$$\Rightarrow z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}$$

خطية بتابع z ومتحول y

نأخذ المتجانسة منها

$$z' + \frac{1}{y}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow z = \frac{c}{y}$$

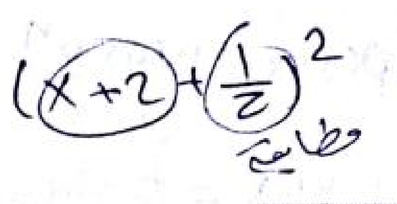
$$z' = \frac{c'y - c}{y^2}$$

نعوض في غير المتجانسة

$$c'y\,y^{-2} - cy^{-2} + cy^{-2} = \frac{\sin y}{y} \Rightarrow c = -\cos y + c_1 y^{-1}$$

$$\Rightarrow z = -y^{-1}\cos y + c_1 y^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = -\frac{\cos y}{y} + \frac{c_1}{y}$$



/ /

ب) معادلة ريكاتي يرافقها حل خاص محكمة

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + R(x) = 0$$

و y_1 حل خاص

نفرض $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{z}}$ ← تحولها لخطية مباشرة

أوجد الحل العام: $y_1 = x+2$ ؛ و $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$

هو المعادلة ريكاتي

نفرض

$$\therefore y = x+2+\frac{1}{z}$$
$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

نعوض نجد

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{z} + (x+2+\frac{1}{z})^2 = 5 - x^2$$

نصلح

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - 2\frac{x}{z} + (x+2)^2 + 2(x+2)(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z^2} = 5 - x^2$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - 2\frac{x}{z} + x^2 + 4x + 4 + \frac{2x}{z} + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} + x^2 - 5 = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' - 4z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4z+1 \Rightarrow \frac{1}{4}\frac{4dz}{4z+1} = dx$$

$$\frac{1}{4}\ln(4z+1) = x + \ln c = (4z+1)^{\frac{1}{4}} = ce^x$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{4z+1} = ce^x$$

لكن $\frac{1}{z} = y - x - 2$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{y-x-2} \Rightarrow \boxed{\sqrt[4]{\frac{4}{y-x-2}+1} = ce^x}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

/ /

أوجد الحل العام: $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$ و $y_1 = -\frac{1}{x}$

معادلة ريكاتي نفرض

$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$

نعوضه نجد

$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x^2} = 0$

$-\frac{z'}{z^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z - 1 = 0$

$\Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = 1$ خطية بتابع z ومتحول x

نأخذ المتجانسة

$z' + \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -2\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow z = cx^{-2}$ (A)

$\Rightarrow z' = c'x^{-2} - 2cx^{-3}$

نعوضها في غير المتجانسة نجد

$c'x^{-2} - 2cx^{-3} + 2cx^{-3} = 1$

$\Rightarrow c' = x^2 \Rightarrow c = \frac{x^3}{3} + c_1$

نعوضها في A نجد:

$z = \frac{x}{3} + c_1x^{-2}$

ومنه $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{z} = y + \frac{1}{x} \Rightarrow z = \frac{x}{xy+1}$

$\Rightarrow \frac{x}{xy+1} = \frac{x}{3} + c_1x^{-2}$

ع.ح.و

المعادلة متجانسة الأبعاد

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

إما نبدل كل x بـ λx
كل y بـ $\lambda^n y$

وكل dx بـ $\lambda\, dx$ وكل dy بـ $\lambda^n dy$ نعوضه ونطابق
فنحصل على قيمة $\boxed{n}$ هي درجة التجانس وبالتالي نفرضه

انطلاقاً من تجانس عام →

$$\boxed{Z = \frac{y}{x^n}}$$

أو نبدل كل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ وكل y' بـ $\lambda^{n-1} y'$ ← تجانس في الأبعاد
ونفس الخطوات

أثبت أن المعادلة التالية متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثانية وأوجد حلها العام:

$$(x^3 + xy)y' = y^2 - x^4$$

نبدل كل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ وكل y' بـ $\lambda^{n-1} y'$ نجد

$$(\lambda^3 x^3 + \lambda x \lambda^n y)\lambda^{n-1} y' = \lambda^{2n} y^2 - \lambda^4 x^4$$

$$(\lambda^{n+2} x^3 + \lambda^{2n} xy)\, y' = \lambda^{2n} y^2 - \lambda^4 x^4$$

بالمطابقة بين القوى نجد

$$n+2 = 2n = 2n = 4 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

هي متجانسة من الدرجة الثانية نفرض $\boxed{Z = \frac{y}{x^2}}$ ومنه

$$y = Zx^2 \Rightarrow y' = Z'x^2 + 2xZ$$

نعوض في المعادلة نجد

$$(x^3 + x^3 z)(2xz + x^2 z') = x^4 z^2 - x^4$$

$$2x^4 z + x^5 z' + 2x^4 z^2 + x^5 z z' = x^4 z^2 - x^4$$

$$\Rightarrow 2z + xz' + 2z^2 + xzz' = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow x(z+1)z' + 2z(z+1) = (z+1)(z-1)$$

$$\Rightarrow xz' + 2z = z - 1 \Rightarrow xz' + z = -1$$

$$\Rightarrow xz' = z - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(z-1) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow z - 1 = cx \Rightarrow z = cx + 1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = cx + 1 \Rightarrow \boxed{y = cx^3 + x^2}$$

نحل x بـ λx وكل dx بـ λdx

y بـ $\lambda^n y$ كل dy بـ $\lambda^n dy$

١- اعتماداً على التجانس العام، أوجد الحل العام

$$(6 - xy)dx + x^2 dy = 0$$

نبدل كل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ وكل dy بـ $\lambda^n dy$ وكل dx بـ λdx

$$(6 - \lambda^{n+1} xy)\lambda\, dx + \lambda^2 x^2 \lambda^n dy = 0$$

$$\Rightarrow (6\lambda - \lambda^{n+2} xy)dx + \lambda^{2+n} x^2 dy = 0$$

نطابق نجد

$$n + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{n = -1}$$

نفرض $Z = \frac{y}{x^{-1}} \Rightarrow \boxed{Z = xy}$

$$\Rightarrow y = \frac{Z}{x} \Rightarrow y' = \frac{Z'x - Z}{x^2} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{Z'}{x} - \frac{Z}{x^2}}$$

$y' = \frac{dy}{dx}$ نعوض نجد

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{6 - xy}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z'}{x} - \frac{Z}{x^2} = -\left(\frac{6 - Z}{x^2}\right) \Rightarrow xZ' - Z = -6 + Z$$

$$xZ' = 2Z - 6$$

$$x\frac{dZ}{dx} = 2Z - 6$$

$$\frac{dZ}{2Z-6} = \frac{dx}{x}$$

فصل متغيرات x ومتحول Z

$$\Rightarrow \frac{Z'}{x} - \frac{Z}{x^2} = \frac{Z}{x^2} - \frac{6}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}\ln(2Z-6) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{Z' - \frac{2}{x}Z = -\frac{6}{x}}$$

$$\sqrt{2Z-6} = cx$$

$$2Z - 6 = c^2x^2$$

المتجانسة $Z' - \frac{2}{x}Z = 0$

$$Z = 3 + \frac{c^2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = cx^2} \Rightarrow \boxed{Z' = c'x^2 + 2cx}$$

$$Y.x = 3 + \frac{c^2}{3}x^2$$

نعوض ونجد

$$\boxed{Y = \frac{3}{x} + c_1 x}, \quad c' = -6x^{-3} \Rightarrow c = \frac{-6}{-2}x^{-2} + c_1$$

$$\boxed{Z = 3 + c_1 x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{xy = 3 + c_1 x^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{x} + c_1 x} \quad \text{ح ع}$$

وإذا ما أهملوا شكلها من السابقة نجعلها المعادلة التامة

بالتجميع

المعادلة التامة

أول ما نفكر بها

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

تسمى المعادلة السابقة التامة إذا وجد تابع $F(x,y)$ بحيث أن

$$dF = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

من جهة

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

عملياً يجب أن يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

ونحن نعلم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

شرط المعادلة التامة

البحث عن F!

سوف نحل جملة المعادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad (2)$$

نوجد F

الحل العام

$$\boxed{F = 0}$$

أوجد الحل العام للمعادلة $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$

$P = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}$

$Q = -\sqrt{x^2-y}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ تامة المعادلة

البحث عن F :

$P \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}$ ...(1)

$Q \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2-y)^{\frac{1}{2}}$ ...(2)

من (2) نجد

$F = \frac{(x^2-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \varphi(x)$ تكاملنا بالنسبة لـ y وتضمين متغير لـ x

نكامل لـ y

$F = \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(x)$

نشتق بالنسبة لـ x

$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2-y)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x + \varphi'(x)$

نعوض في (1) نجد

$2x(x^2-y)^{\frac{1}{2}} + \varphi'(x) = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = x^2 + c}$ بعد ما حسبنا $\varphi(x)$

نعوض بعدها للحل العام

$F(x,y) = \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} + x^2 + C$

$\Rightarrow$ هو الحل العام $= 0$

أوجد الحل العام للمعادلة: $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

$$P = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \quad , \quad Q = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y(x-y)^2 - 2(x-y)(-1)y^2}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{-2yx - 2y^2 + 2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x(x-y)^2 - 2(x-y)x^2}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ ⇐ المعادلة تامة

نبحث عن F ،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \quad \text{--- (2)}$$

من (1) نكامل بالنسبة لـ x نجد

$$F = \ln x - y^2 \int \frac{dx}{(x-y)^2} = \ln x - y^2 \int (x-y)^{-2} dx$$

$$\Rightarrow F = \ln x - y^2 \frac{(x-y)^{-1}}{-1} + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow F = \ln x + y^2 (x-y)^{-1} + \varphi(y)$$

نشتق بالنسبة لـ y نجد

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x-y)^{-1} - 1(-1)(x-y)^{-2} y^2 + \varphi'(y)$$

نعوض في (2) نجد

$$\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 2y(x-y)^{-1} + (x-y)^{-2} y^2 + \varphi'(y)$$

$$(x-y)^2 = (y-x)^2$$

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{x-y} + \frac{y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} - \frac{x-y}{y(x-y)} - \frac{2y^2}{(x-y)y}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} - \frac{x+y-2y^2}{xy-y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} + \frac{y-x-2y^2}{xy-y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x+y}{x-y} - \frac{2y}{x-y} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x-y}{x-y} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$$

نكامل

$$\Rightarrow \varphi(y) = y - \ln y + c$$

نعوض بـ F

$$F(x,y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y + c$$

$$F(x,y) = \ln\frac{x}{y} + y + \frac{y^2}{x-y} + C$$

الحل العام

$$\ln\frac{x}{y} + y + \frac{y^2}{x-y} = 0$$

/ /

أوجد الحل العام

1) $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy \neq \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy \Rightarrow$ تامة

نبحث عن F :

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6xy^2$ — ①

$\frac{\partial f}{\partial y}=6x^2y+4y^3$ — ②

من ① نجد

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \xrightarrow{\text{نكامل } dx} F=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$ — ③

نشتق بالنسبة لـ y نجد

$\frac{\partial f}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)$

نعوض في ② نجد

$6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3 \Rightarrow \varphi'(y)=4y^3$

$\Rightarrow \varphi(y)=y^4+C$

نعوض في ③ نجد

$$F=x^3+3x^2y^2+y^4+C$$

الحل العام $\Rightarrow$ $x^3+3x^2y^2+y^4+C=0$

أوجد الحل العام

$y'+y^2=2y\sin x+\cos x-\sin^2 x$

و $y_1=\sin x$

$y'-2y\sin x+y^2=\cos x-\sin^2 x$

معادلة ريكاتي: نفرض التحويل

$y=y_1+\frac{1}{z} \Rightarrow y=\sin x+\frac{1}{z}$

نعوض نجد

$\Rightarrow y'=\cos x+\frac{z'}{z^2}$

~~$\cos x - \frac{z'}{z^2} + (\sin x + \frac{1}{z})^2 = 2(\sin x + \frac{1}{z})\sin x + \cos x - \sin^2 x$~~

~~$-\frac{z'}{z^2} + \sin^2 x + 2\frac{\sin x}{z} + \frac{1}{z^2} - 2\sin^2 x - \frac{2}{z}\sin x + 2\sin^2 x = 0$~~

~~$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} = \sin^2 x$~~

$$\cos x - \frac{z'}{z^2} - 2\sin^2 x - \frac{2}{z}\sin x + \sin^2 x + \frac{2}{z}\sin x + \frac{1}{z^2} = \cos x - \sin^2 x$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow dz = dx \Rightarrow \boxed{z = x + c}$$

ومن الفرض $y = \sin x + \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = y - \sin x$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{y - \sin x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y - \sin x} = x + c}$$

وهو الحل العام

عامل التكميل للمعادلات غير التامة

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{غير تامة}$$

نفرض وجود تابع $\mu(x,y)$ إذا ضربناه بطرفي المعادلة تصبح تامة

$$\mu \cdot P(x,y)\,dx + \mu\, Q(x,y)\,dy = 0$$

حيث $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ تامة

إيجاد عامل التكميل:

1. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ غير تامة

2. $\frac{\partial \ln \mu}{\square} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{\square}$ نختاره حسب

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx \qquad Z \text{ تابع لـ } x$$

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}\,dy \qquad Z \text{ تابع لـ } y$$

$$\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P}\,dz \qquad Z \text{ تابع لـ } x+y$$

$$\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial z}{\partial x} - P\frac{\partial z}{\partial y}}\,d(z^{x^2+y^2}) \qquad Z \text{ تابع لـ } x^2+y^2$$

وإيجاد جميع عوامل التكميل:

1. [illegible]
2. للبحث عن عامل التكميل ← 1، 2، 3

$$2\sin y \cos y = \sin 2y$$

$/ \ * [(\sin y)^2]' \Rightarrow 2\sin y \cos y$

مشتقة داخل القوس × الأس وأقه

③ نوجد μ

④ نضربه بالمعادلة ⟸ أصبحت تامة

⑤ لإيجاد جميع عوامل التكميل نوجد $F(x,y)$ باختيار $x_0 =$ $y_0 =$

⑥ نبحث عن F بالشكل

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

أو

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$$

حسب الأسهل

⑦ نطبق $\mu Q(F)$

مهم

مثال: أوجد حل المعادلة التالية

$$(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\cos y \sin y = -\sin 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y$$

المعادلة ليست تامة نبحث عن عامل التكميل

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-\sin 2y - \sin 2y}{Q} = \frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = \frac{-2}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln\mu = -2\ln x \Rightarrow \boxed{\mu = x^{-2}}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$(1 - x^{-2}\sin^2 y)\,dx + x^{-1}\sin 2y\,dy = 0$$

نتأكد أنها أصبحت تامة

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x^{-2}\sin y\cos y = -x^{-2}\sin 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x^{-1}\sin 2y = -x^{-2}\sin 2y$$

$= \Rightarrow$ المعادلة تامة

للبحث عن $F(x,y)$ ...:

$\int \sin ay\,dy = -\frac{1}{a}\cos ay$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

البحث عن F:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - x^{-2}\sin^2 y \quad \ldots (1)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{-1}\sin 2y \quad \ldots (2)$

من (2) نكامل بالنسبة لـ y نجد

$F = x^{-1}\int \sin 2y\,dy + \varphi(x)$

$\Rightarrow F = -x^{-1}\frac{1}{2}\cos 2y + \varphi(x) \quad \ldots (3)$

نشتق (3) بالنسبة لـ x نجد

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}((-1)x^{-2}\cos 2y) + \varphi'(x) \ldots (3')$

نعوض (3') في (1) نجد

$\frac{x^{-2}}{2}\cos 2y + \varphi'(x) = 1 - x^{-2}\sin^2 y$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - x^{-2}\sin^2 y - \frac{x^{-2}}{2}\cos 2y$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \frac{x^{-2}}{2}(1 - \cos 2y) - \frac{x^{-2}}{2}\cos 2y$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \frac{x^{-2}}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = x + \frac{1}{2x} + c}$

نعوض في (3) نجد

$F = -\frac{1}{2x}\cos 2y + x + \frac{1}{2x} + c$

$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2x}\cos 2y + x + \frac{1}{2x} + c = 0}$

الحل العام



سؤال محلول كالامتحان 4 مهم

أوجد عامل التكميل للمعادلة:

$$\underbrace{(x\sin y + y\cos y)}_{P}\,dx + \underbrace{(x\cos y - y\sin y)}_{Q}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = +x\cos y + \cos y - y\sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$$

$\neq$ المعادلة ليست تامة، نبحث عن عامل التكميل

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{x\cos y - y\sin y}{Q}\,dx = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1\,dx$$

اختياري للسهولة $\rightarrow Q$

$$\Rightarrow \ln \mu = x \Rightarrow \boxed{\mu = e^{x}}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نجد

$$(x e^{x}\sin y + y e^{x}\cos y)\,dx + (x e^{x}\cos y - y e^{x}\sin y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x e^{x}\cos y + e^{x}\cos y - e^{x} y\sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x e^{x}\cos y + e^{x}\cos y - e^{x} y\sin y$$

$=$ أصبحت تامة

البحث عن F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x}(x+1)\cos y - e^{x} y\sin y \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{x}(x+1)\cos y - e^{x} y\sin y \quad (2)$$

من (1) نكامل بالنسبة لـ x نجد

$$F = \int x e^{x}\cos y\,dx + \cos y\int e^{x}\,dx - y\sin y\int e^{x} + \varphi(y)$$

بالتجزئة

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{x}dx \Rightarrow v = e^{x}$$

أثبت أن المعادلة غير تامة وأوجد حلها العام علماً أنها تقبل عامل تكميل لـ x^2+y^2

$$y\,dx - (x + x^2 + y^2)\,dy = 0$$

ليست تامة $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 2x$

عامل التكميل تابع لـ $z = x^2+y^2 \Leftarrow$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial z}{\partial x} - P\frac{\partial z}{\partial y}} \cdot \partial(z)$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{2+2x}{-(x+x^2+y^2)(2x) - y \cdot 2y}(\partial z) = \frac{2+2x}{-2x^2-2x^3-2xy^2-2y^2}\partial(z)$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{1+x}{x^3+x^2+xy^2+y^2}\partial(z) = -\frac{1+x}{x^2(1+x)+y^2(1+x)}\partial(z)$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{1}{x^2+y^2}\partial(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{-\partial(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \ln \mu = -\ln(x^2+y^2) \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{x^2+y^2}}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نجد:

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}dy = 0$$

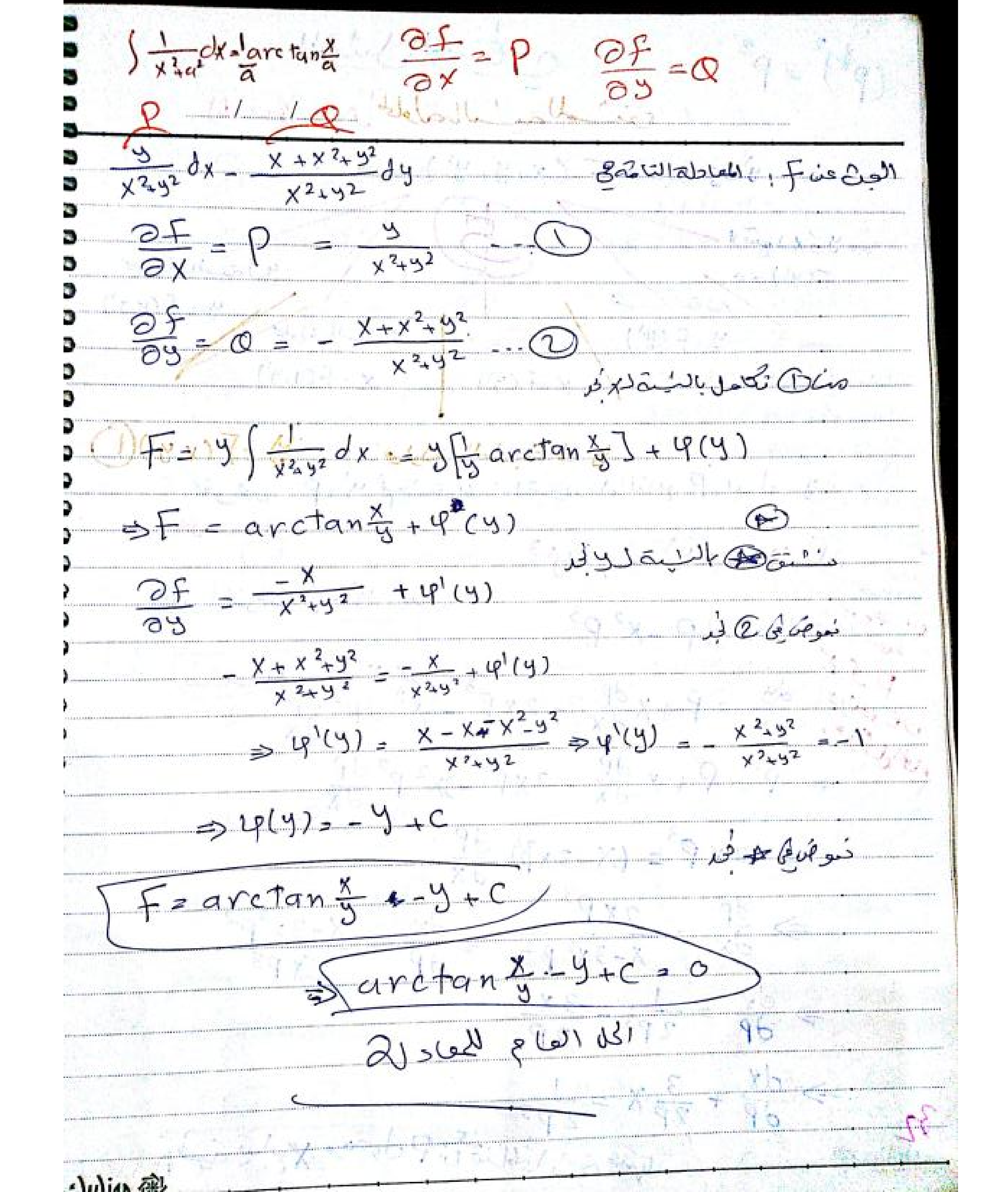
(P تحت الحد الأول، Q تحت الحد الثاني)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ تامة $\Leftarrow$

30



$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

P / / Q

$\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}dy$ المعادلة التامة ؛ F البحث عن

$\frac{\partial f}{\partial x} = P = \frac{y}{x^2+y^2}$ ... (1)

$\frac{\partial f}{\partial y} = Q = -\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}$ ... (2)

من (1) نكامل بالنسبة لـ x نجد

$F = y\int \frac{1}{x^2+y^2}dx = y\left[\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\right] + \varphi(y)$

$\Rightarrow F = \arctan\frac{x}{y} + \varphi(y)$ (*)

نشتق (*) بالنسبة لـ y نجد

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$

نعوض في (2) نجد

$-\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$

$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x-x-x^2-y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = -\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = -1$

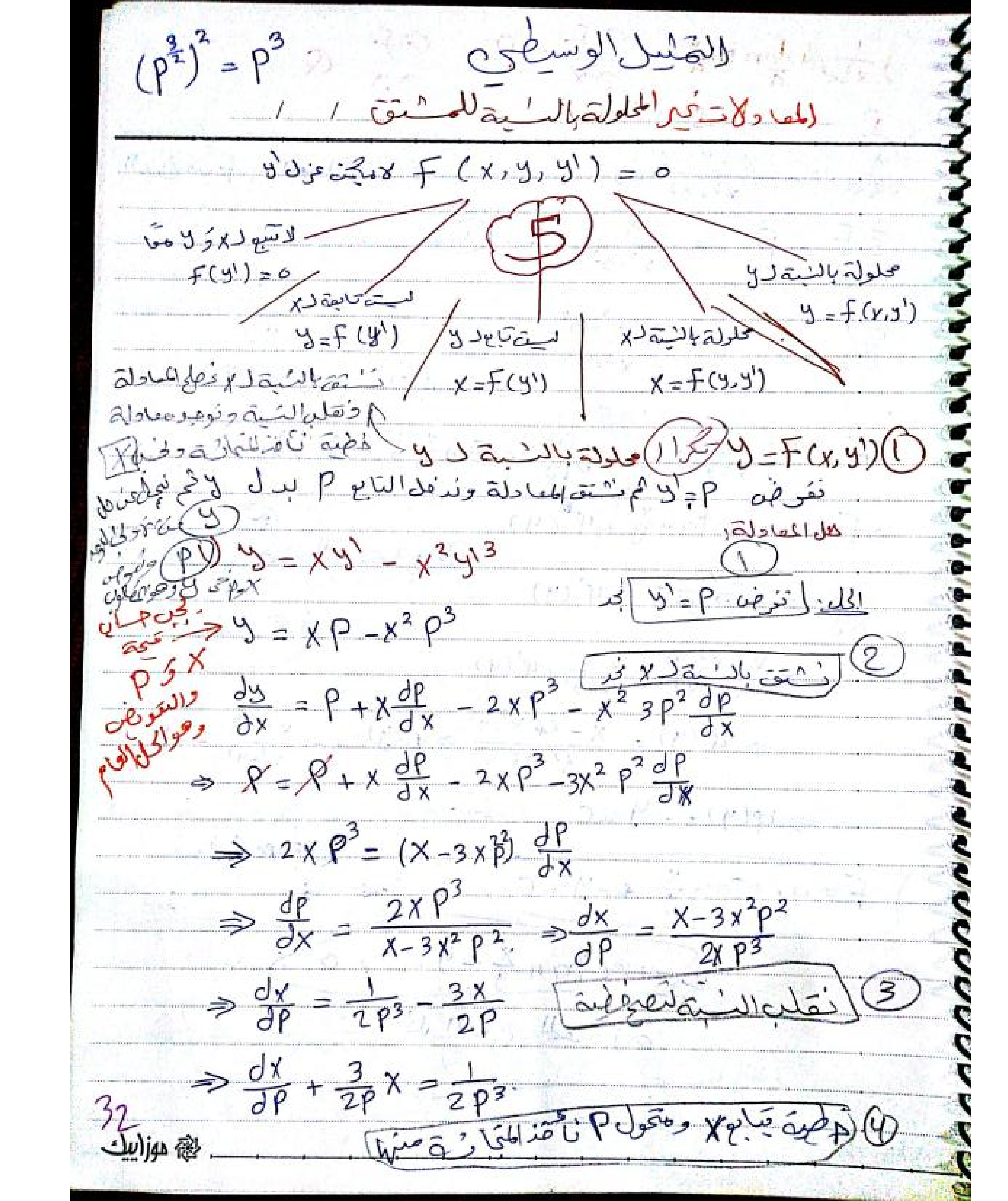
$\Rightarrow \varphi(y) = -y + C$

نعوض في * نجد

$F = \arctan\frac{x}{y} - y + C$

$\Rightarrow \arctan\frac{x}{y} - y + C = 0$

الحل العام للمعادلة



$(p^{\frac{3}{2}})^2 = p^3$

التحليل الوسيطي

المعادلات غير المحلولة بالنسبة للمشتق

$F(x, y, y') = 0$ لا يمكن عزل y'

5

- لا تتبع لـ x و y معاً: $F(y') = 0$
- ليست تابعة لـ x: $y = f(y')$ — نشتق بالنسبة لـ x طرفي المعادلة ونقلب النسبة ونوجد معادلة خطية تأخذ المتغيرات وتكامل
- ليست تابعة لـ y: $x = f(y')$
- محلولة بالنسبة لـ x: $x = f(y, y')$
- محلولة بالنسبة لـ y: $y = f(x, y')$

① $y = F(x, y')$ (تكرار) محلولة بالنسبة لـ y

نفرض $p = y'$ ثم نشتق المعادلة وندخل التابع p بدل y' ثم نجد حل المعادلة

مثال ①: $y = xy' - x^2 y'^3$

الحل: ① نفرض $y' = p$ نجد

$\Rightarrow y = xp - x^2 p^3$

نجد حل y بدلالة p و x والتعويض وهو الحل العام

② نشتق بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 2xp^3 - x^2\, 3p^2 \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} - 2xp^3 - 3x^2p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 2xp^3 = (x - 3x^2p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{2xp^3}{x - 3x^2p^2} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x - 3x^2p^2}{2xp^3}$$

③ نقلب النسبة لتصبح خطية

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{1}{2p^3} - \frac{3x}{2p}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}x = \frac{1}{2p^3}$$

④ خطية بتابع x ومتحول p نأخذ المكاملة منها

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p} x = 0$$

نأخذ المتجانسة وحدها لإيجاد

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3\,dp}{2p} \Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2}\ln p + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{x = c\,p^{-\frac{3}{2}}} \quad (A')$$

⑤ حسبنا X

نجعل c متغيراً في p ونشتق نجد

$$\frac{dx}{dp} = c' p^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} c p^{-\frac{5}{2}}$$

نعوض في غير المتجانسة نجد

$$c' p^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} c p^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{2p} c p^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2p^3}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{1}{2} p^{-3} \cdot p^{\frac{3}{2}} \Rightarrow c' = \frac{1}{2} p^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}}$$

نعوض في (A') نجد

$$x = \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} p^{-\frac{1-3}{2}} = \frac{1}{2} p^{-2} = \frac{1}{2p^2}$$

والآن علينا حساب p لنعوض بأول خطوة

⑥ من أول خطوة نجد

$$y = xp - x^2 p^3$$

نعوض مكان كل x بما نتج نجد

$$y = c p^{-\frac{1}{2}} - c^2 p^{-3} p^3$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c p^{-\frac{1}{2}} - c^2}$$

من ① نجد

$$x^{-\frac{2}{3}} = c^{-\frac{2}{3}} p$$

$$\Rightarrow p = c^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}$$

نعوض في ②

هنا خذ قيمة x و y الناتجتين وحلهما سوياً

$$\left.\begin{aligned} x &= c p^{-\frac{3}{2}} \\ y &= c p^{-\frac{1}{2}} - c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = c^{-\frac{2}{3}} p \Rightarrow p = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow p^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \boxed{y = c^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} - c^2}$$

/ /

2) $y = 2xy' + y'^3$ — أوجد الحل العام ; محلولة بالنسبة لـ y

① نعوض p = y' ونشرطه

$$y = 2xp + p^3$$

② نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$p = 2p + (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -p = (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

③ نقلب المشتقات لنوجد X

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2x + 3p^2}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 3p$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -3p$$

خطية تابع x ومتحول p
نأخذ المتجانسة

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \ln x = -2\ln p + \ln c \Rightarrow \boxed{x = cp^{-2}}$$

لنوجد y نعوض في ① نجد

$$y = 2cp^{-2}p + p^3 \Rightarrow \boxed{y = 2cp^{-1} + p^3}$$

~~والحل المشترك x و y بدلالة~~ ونحن بحاجة حذف p وهي y

الآن نحذف p من قيمة x ونعوض ~~في~~ بالمعادلة الأخيرة

$(P^{-2})^{\frac{1}{2}}$ (P)

لنكتب المعادلة بدلالة C و X نجد

$$X = CP^{-2} \Rightarrow P^{-2} = XC^{-1} \Rightarrow P = X^{-\frac{1}{2}} C^{+\frac{1}{2}}$$

نعوض في

$$y = 2CP^{-1} + P^{3}$$

$$\Rightarrow y = 2C\left(X^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} + \left(X^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}\right)^{3}$$

$$\Rightarrow y = 2C\, X^{\frac{1}{2}} C^{-\frac{1}{2}} + X^{-\frac{3}{2}} C^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2X^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} + X^{-\frac{3}{2}} C^{\frac{3}{2}}}$$

وهو الحل العام بدلالة X و C

طريقة الحل دوماً

(1) نفرض $y' = P$ (2) نشتق بالنسبة لـ X (3) نرجع المعادلة

(4) نقلب المشتق ليصبح $\frac{dx}{dp}$ (5) تصبح معادلة خطية نوجد قيمة $X = CP$

(6) نعوضه في المعادلة (1) (7) نجيب من (5) قيمة P ونعوضها في (1)

(8) الحل العام $y = C^{\circ} X^{\circ} + \dots$ بدلالة C و X فقط

جعفر أدلوف

أوجد الحل العام

$$y'^2 + x(y'+2) - y = 0$$

$$y = xy' + 2x + y'^2$$

نفرض $y' = p \Leftarrow$

① $y = xp + p^2 + 2x$

نشتق بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} + 2$$

$$\Rightarrow p = p + (x+2p)\frac{dp}{dx} + 2 \Rightarrow -2 = (x+2p)\frac{dp}{dx}$$

نقلب النسبة

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{-2}{x+2p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{x}{2} - p$$

خطية غير متجانسة

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{1}{2}x = -p$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}dp$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}p + \ln c \Rightarrow \boxed{x = ce^{-\frac{1}{2}p}}$$

نعوض في ① نجد

$$y = ce^{-\frac{1}{2}p}\,p + p^2 + 2ce^{-\frac{1}{2}p}$$

ونعوض قيمة p من x نجد

$$-\frac{1}{2}p = \ln x - \ln c$$

$$\Rightarrow p = 2\ln\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow p = \ln\left(\frac{c}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow y = ce^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{c}{x}\right)^2}\ln\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \ln\left(\frac{c}{x}\right)^4 + 2ce^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{c}{x}\right)^2}$$

$$y = ce^{\ln\left(\frac{c}{x}\right)^{-1}}\ln\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \ln\left(\frac{c}{x}\right)^4 + 2ce^{\ln\left(\frac{c}{x}\right)^{-1}}$$

$$y = c\left(\frac{c}{x}\right)^{-1}\ln\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \ln\left(\frac{c}{x}\right)^4 + 2c\left(\frac{c}{x}\right)^{-1}$$

② إذا كانت محلولة بالنسبة لـ x $x = f(y, y')$

نفرض $p = y'$ ونشتق بالنسبة لـ y.

---

③ إذا كانت المعادلة لا تحوي y

$x = f(y')$

نفرض $y' = t$

$$x = f(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t\,dx$$

$$\Rightarrow y = f(t)$$

★ أوجد الحل العام وسيطياً

$$\ln y' + \sin y' - x = 0$$

$$x = \ln y' + \sin y'$$

نفرض $y' = t \Leftarrow$

$$x = \ln t + \sin t$$

نشتق بالنسبة لـ t

$$dx = \left(\frac{1}{t} + \cos t\right) dt$$

من الأعلى $\Rightarrow dy = t \cdot dx \Rightarrow dy = (1 + t\cos t)\, dt$

$$\Rightarrow y = t + \int t\cos t \, dt + c$$

حل المعادلة:

1) $y = xy' - x^2 y'^3$

① نفرض $y' = p$

$y = xp - x^2 p^3$ ⊛

② نشتق بالنسبة لـ x نجد

$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 2xp^3 - 3x^2p^2\frac{dp}{dx}$

$\cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} - 2xp^3 - 3x^2p^2\frac{dp}{dx}$

$(x - 3x^2p^2)\frac{dp}{dx} = 2xp^3$

③ نقلب النسبة

$\frac{dp}{dx} = \frac{2xp^3}{x - 3x^2p^2}$

$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{2xp^3} - \frac{3}{2}\frac{x^2p^2}{xp^3}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{1}{2p^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{p}x$

④ خطية غير متجانسة

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2}\frac{1}{p}x = \frac{1}{2p^3}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\frac{dp}{p}$

$\Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2}\ln p + \ln c \Rightarrow$ $\boxed{x = cp^{-\frac{3}{2}}}$ ⊛

⑤ نعوض ⊛ قيمة x في ① نجد

$y = cp^{-\frac{3}{2}}p - c^2 p^{-\frac{3}{2}\cdot 2} p^3$

$-\frac{3}{2}+1 = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = cp^{-\frac{1}{2}} - c^2$ هون عوضنا بالأولى قيمة X حل نوجد P

⑥ من X نوجد قيمة P ونعوضها في السابقة

$$X = cp^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = c^{-\frac{2}{3}} p \Rightarrow \boxed{p = c^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}}$$

⑦ نعوض عن قيمة X وَ P في نجد الحل العام

$$y = c\left(c^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} - c^2$$

$$y = c\left(c^{-\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}\right) - c^2 \Rightarrow \boxed{y = c^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} - c^2}$$

وهو الحل العام

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y - xy'^2 = y'^2$$

نفرض $P = y'$ ونعوض نجد

$$y = xp^2 + p^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xp\frac{dp}{dx} + p^2 + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2xp + 2p)\frac{dp}{dx} + p^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x+1)p\frac{dp}{dx} + p^2$$

$$\Rightarrow p - p^2 = 2(x+1)p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 - p = 2(x+1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1-p}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2(x+1)}{1-p} \Rightarrow \frac{dx}{2(x+1)} = \frac{dp}{1-p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x+1) = -\ln(1-p) + \ln c \Rightarrow (x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{(1-p)}$$

انتبه انغلاط بالأس (2)

$$\Rightarrow 1+X = \frac{C^2}{(1-P)^2}$$

$$(*) \Rightarrow X = \frac{C^2}{(1-P)^2} - 1$$

نعوض في أول معادلة نجد

$$y = \left(\frac{C^2}{(1-P)^2} - 1\right) P^2 + P^2$$

لنوجد P من علاقة X (*)

$$X+1 = \frac{C^2}{(1-P)^2} \Rightarrow \left(\frac{1-P}{C}\right)^2 = \frac{1}{X+1} \Rightarrow (1-P)^2 = \frac{C^2}{X+1}$$

$$1-P = \frac{C}{\sqrt{X+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}}$$

نعوض X و P في y نجد

$$y = \left(\frac{C}{1-1+\frac{C}{X+1}} - 1\right)\left(1 - \frac{C}{X+1}\right)^2 + \left(1 - \frac{C}{X+1}\right)^2$$

$$y = (X+1-1)\left(1 - \frac{C}{X+1}\right)^2 + \left(1 - \frac{2C}{X+1} + \frac{C^2}{(X+1)^2}\right)$$

$$y = X\left(\frac{(X+1)^2 - 2C(X+1) + C^2}{(X+1)^2}\right) + \left(\frac{(X+1)^2 - 2C(X+1) + C^2}{(X+1)^2}\right)$$

$$y = \left(1 - \frac{C}{X+1}\right)^2 (X+1)$$

وهو الحل العام

نتج بالنهاية

$$X = \frac{C^2}{(1-P)^2} - 1$$

$$y = \frac{C^2}{(1-P)^2} - 1$$

محلولة بالنسبة لـ y نشتق بالنسبة لـ x ونوجد x و p
〃 〃 〃 x 〃 〃 〃 لـ y 〃 y و p

/ /

~~$y'^2 + x(y'+2) - y = 0$~~ أوجد الحل العام

محلولة مسبقاً

$$y' = 2\sqrt{y}\left(x - \frac{2y}{y'}\right)$$

$$y' = 2\sqrt{y}\, x - 4\frac{\sqrt{y}\, y}{y'} \Rightarrow 2\sqrt{y}\, x = y' + 4\frac{\sqrt{y}\, y}{y'}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' + 2y(y')^{-1}$$

$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$

نعوض $p = y'$ نجد

$$x = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} p + 2y p^{-1}$$

نشتق بالنسبة لـ y نجد

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{4} y^{-\frac{3}{2}} p + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \frac{dp}{dy} + 2p^{-1} - 2y p^{-2}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \frac{dp}{dy} - \frac{1}{4} p y^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{p} - 2y p^{-2}\frac{dp}{dy}$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{4} p y^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - 2y p^{-2}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

(متحا والنصف نصف شبه موجود)

$$\left(p^{-1} - \frac{1}{4} p y^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - 2y p^{-2}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$-\frac{1}{2y}p\left(-2y p^{-2} + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - 2y p^{-2}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\left(\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2}\frac{p}{y}\right)\left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - 2y p^{-2}\right) = 0$$

إما

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2}\frac{p}{y} = 0 \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}} = 4y p^{-2} \Rightarrow y = 4^{-2} y^{-2} p^4$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{p^4}{16}$$

$$\Rightarrow p^4 = 16y^3 \Rightarrow p = 2y^{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} p y^{-\frac{1}{2}} + 2y p^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 2 y^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{2}} + 2y\, 2^{-1} y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^4 = 16y}$$ الحل شاذ

أو $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{2y} \Rightarrow p = c\sqrt{y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{p^2}{c^2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} p y^{-\frac{1}{2}} + 2y p^{-1} \\ x = \frac{1}{2} p \frac{p^{-1}}{c^{-1}} + \frac{2p^2 p^{-1}}{c^2} \end{cases}$$

تمثيل وسيطي

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{c}{2} + \frac{2p}{c^2} \\ y = \frac{p^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = c\sqrt{y} \Rightarrow x = \frac{c}{2} + \frac{2c\sqrt{y}}{c^2}$$

$$\Rightarrow cx = \frac{c^2}{2} + 2\sqrt{y} \Rightarrow 2\sqrt{y} = cx - \frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{cx}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{cx}{2} - \frac{c^2}{4}\right)^2}$$

إذا كانت المعادلة لا تحوي y ؛ (وسيطياً) /

أوجد الحل العام وسيطياً : $\ln y' + \sin y' - x = 0$

$x = \ln y' + \sin y'$; $y' = t$ ، $\frac{dy}{dx} = t$

$x = \ln t + \sin t$

$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{t} + \cos t\right) \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{t} + \cos t\right)dt$

ونعلم $\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t\,dx$

$\Rightarrow dy = (1 + t\cos t)\,dt$

بالمكاملة

$\Rightarrow y = t + \int t\cos t\,dt + C$

بالتجزئة $du = \cos t\,dt \Rightarrow u = \sin t$

$y = t + t\sin t + \cos t + C$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = t + t\sin t + \cos t + C \\ x = \ln t + \sin t \end{cases}$$

الحل العام بالتمثيل الوسيطي.

طريقة الحل

① نفرض $y' = t$ أي $\frac{dy}{dx} = t$ نعزل x ونشتقها بالنسبة لـ t أي $\frac{dx}{dt} = \square \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t\,dx$

② نعوض فيما سبق ونكامل نحصل على $y = \square$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dots \\ x = \dots \end{array}\right\}$$ والحل العام وسيطياً بدلالة t

وسيطيا

إذا كانت المعادلة لا تحوي X :

$$y = \ln(1 + y'^2)$$

نفرض $y' = t$ ⇐

$$y = \ln(1 + t^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

لكن $\frac{dy}{dx} = t$ ⇐ $dx = \frac{dy}{t}$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \arctan t + c \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$$ الحل العام وسيطياً

الطريقة:

X غير موجودة: ① نفرض $y' = t$ ② نعوض بالمعادلة
③ نشتق y بالنسبة لـ t ④ نفصل dy لوحدها
⑤ نعوض $\frac{dy}{dx} = t$ من الفرض ⑥ نفصل dx
⑦ نكامل dx ونحصل على X ⑧ الحل وسيطياً هو $\begin{cases} y = \\ x = \end{cases}$ بدلالة t

لا تحوي لا x ولا y بنفس الوقت

$$F(y') = 0$$

حلها العام

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$

أوجد الحل العام:

$$3y'^4 - 3y'^2 + 5 = 0$$

الحل:

$$3\left(\frac{y-c}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + 5 = 0$$

وهو الحل العام

/ /   شوية تكاملات

ADANOU V

جعفر أدنوف

$\int \tan x\, dx = -\ln \cos x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot a x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$

$\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx$; $u = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow du = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

; $dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \Rightarrow v = -\cot x$

$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\cos ax} + \tan ax\right| + c$

$= \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\sin ax} + \cot ax\right| + c$

$= \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| + c$

$\int \frac{\text{درجة البسط أكبر أو تساوي}}{\text{من درجة المقام}} dx$

فنقسم البسط على المقام ونوجد التكاملات

$\int \frac{\text{البسط أصغر}}{\text{من المقام}} dx =$ نفرق الكسور

$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + c$

$\int \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$

أدنوف

$\int \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = -\int \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}$

$= \ln(1-\ln x) + c$

$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

$\int \underbrace{2e^x}_{g'(x)} e^{\overbrace{2e^x}^{g(x)}} dx = e^{2e^x}$

$\int 2\sin x\, e^{-2\cos x} dx = e^{-2\cos x}$

$\int g'(x)\, e^{g(x)} dx = e^{g(x)}$

$\int f'(x)\, e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$

$\int \cos x \sin x\, e^{\cos x} dx$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$ نفرض

$\Rightarrow -\int t e^t dt$ نعوض

$u = t \Rightarrow du = dt$ نفرض

$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$

$-\left[t e^t - \int e^t dt\right]$ نعوض

$= -\left[t e^t - e^t\right]$

$= -[t-1]e^t$

$\int \cos x \sin x\, e^{-\cos x} dx$

$-\cos x = t$ نعوض

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 \cdot x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\int \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} dx = -\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$\int \underset{dv}{e^x} \underset{u}{(ax^2+bx+c)} dx$$

دو تکرار

$$\int \ln x\, dx \quad ; u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$= x\ln x - x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsh} x$$

$$\int x e^{\frac{3x^2}{2}} dx = \frac{1}{3}\int 3x e^{\frac{3x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{\frac{3x^2}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{e^{3x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C$$

$$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{4\sqrt{x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-4\sqrt{x}} dx$$

$$(e^{-4\sqrt{x}})' = \frac{-2}{\sqrt{x}} e^{-4\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2}{\sqrt{x}} e^{-4\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{2} e^{-4\sqrt{x}} + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\int \frac{x \cdot x}{(x^2+1)^2} dx \rightarrow u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow v = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx$$

$$dt \qquad t^2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \ldots$$

Ja'far Adanour

① طرق تجزئة الكسور ومتى نستخدمها؟

استخدمه عندما يكون لدينا تكامل كسر درجة البسط أصغر من المقام

البسط ≥ المقام ← (نقسم البسط على المقام)

في حالة أصغر: نحلل المقام إلى جداء أقواس (عوامل أولية)

← داخل القوس درجة أولى (كل الأقواس) ولا واحد مكرر

التجميع للقوس هو التكرار

في حالة عدم التكرار ←

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(\ )} + \frac{B}{(\ )} + \dots$$

كل الأقواس من الدرجة الأولى (إلى جانب القوس) نختصر الأقواس ثم نعوض بالقيمة التي تعدم مقام A

في حالة التكرار

$$\# \ \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

مكرر درجة أولى

نوجد A كالعادة

ثم نوجد C (الحرف الذي فوقه أعلى أس بنفس الطريقة) نضرب بـ x^2 وحيداً

ثم B نعوض A، C بالعلاقة واختار X من مجموعة التعريف.

★ داخل القوس درجة ثانية بلا تكرار ★

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad R\setminus\{2\}$$

درجة ثانية

نوجد A مثل العادة

لنوجد B نضرب الطرفين بـ X أعلى درجة البسط (درجة المقام) ونوجد اللانهاية

لكل التركيب بحيث ★ X→∞ (يطلع معي معادلة فيها A، B مجهولين نعوض

A من السابق فينتج B)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x(x^2+1)}\right) = A + \lim_{x \to \infty}\left(\frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}\right) \Rightarrow 0 = A + B$$

النهاية أعلى الأس

لنوجد C نعوض A، B ونختار قيمة لـ X من مجموعة التعريف (بكل التركيب الأساسي)

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

نوجد (1)، ضرا

في حالة تكرار الدرجة الثانية نضع

نوجدها ثانياً

مثال على ما سبق:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

نفرق الكسور بالطريقة

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

(درجة أولى) (درجة ثانية)

نحسب A نضرب طرفي العلاقة بـ x ونعوض كل x بـ 0 نجد

$$\frac{1}{x^2+1} = A + \frac{(Bx+C)x}{x^2+1} \Rightarrow \boxed{1 = A}$$

نحسب B نضرب طرفي العلاقة بـ x لنجعل درجة البسط = درجة المقام

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} = A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}$$

ونوجد نهاية العلاقة الناتجة عندما $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = A + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = A + B$$

(لأن درجة المقام والبسط متساوية) $\Rightarrow B = -A \Rightarrow \boxed{B = -1}$

نحسب C نعوض A و B بالعلاقة نجد

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+C}{x^2+1}$$

ونختار قيمة لـ x من مجموعة التعريف $R \setminus \{0\}$ نجد اخترنا (1)

$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{-1+C}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2-1+C}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+C}{2} \Rightarrow C+1 = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$